La legge di Darcy

Studiamo i moti di filtrazione dell'acqua nei terreni definendo un volume di controllo V, una portata netta in esso entrante attraverso il suo contorno chiuso di area A (⊥ alla direzione del moto):

$$Q = \int_A v_a \cdot dA$$

Con v_a velocità apparente. Considerando l'area dei pori A_p, frazione di A:

$$v_a = \frac{Q}{A} ; \bar{v} = \frac{Q}{A_p} \Rightarrow \frac{v_a}{\bar{v}} = \frac{A_p}{A} \Rightarrow v_a = \frac{A_p}{A} \cdot \bar{v} = m \cdot \bar{v} = n \cdot \bar{v}$$

Infatti si ottiene che statisticamente $m = \frac{A_p}{A} = n = \frac{V_v}{V}$

Ricordiamo inoltre carico totale e carico piezometrico:

$$H = z + \frac{u}{\gamma_w} + \frac{\bar{v}^2}{2g} \Rightarrow h = H - \frac{\bar{v}^2}{2g} = z + \frac{u}{\gamma_w}$$

Nei terreni si trascura il termine cinetico poiché la velocità è molto bassa. Considerando la conservazione dell'energia in un moto tra due punti A e B è possibile definire il gradiente idraulico che descrive la perdita di carico piezometrico:

$$z_A + \frac{u_A}{\gamma_w} = z_B + \frac{u_B}{\gamma_w} + \Delta h \Rightarrow i = -\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta s} = -\frac{dh}{ds}$$

La legge di Darcy afferma che sussiste dipendenza lineare tra la velocità apparente v_a e il gradiente idraulico i:

$$v_a = k \cdot i$$

Con k coefficiente di conducibilità idraulica estremamente variabile (anche undici ordini di grandezza) tra le terre a grana grossa e quelle a grana fine. La sua corretta definizione è quindi di estrema importanza per la giusta interpretazione dell'entità dei fenomeni di filtrazione.

La legge di Hazen lega k a d_{10}: $k = (90 \div 120) \cdot d_{10}^2$ [cm/s].

Si distinguono due condizioni del terreno:

- drenata, quando in ogni punto di un volume di terreno la variazione delle tensioni efficaci coincide con la variazione delle tensioni totali;
- non drenata, quando in ogni punto di un volume di terreno non è possibile scambiare acqua con l'esterno. È più complesso definire il valore delle tensioni efficaci e totali.

La valutazione delle sovrappressioni avviene in modo differente a seconda del caso in cui ci troviamo:

- triassiale isotropico ($\Delta\sigma_1=\Delta\sigma_2=\Delta\sigma_3=\Delta\sigma \Rightarrow \Delta p=\Delta\sigma$, $\Delta p'=\Delta\sigma-\Delta u$):

  compressibilità: solido $C_s=\frac{\Delta V_s}{V}\cdot\frac{1}{\Delta p'}$ liquido $C_w=\frac{\Delta V_w}{V_w}\cdot\frac{1}{\Delta u}$

  Per congruenza $\Delta V_s=\Delta V_w$:

  $$\frac{C_s}{C_w}=\frac{\cancel{\Delta V_s}/V \;\; 1/\Delta p'}{\cancel{\Delta V_w}/V_w \;\; 1/\Delta u}=\frac{\Delta u}{\Delta p'}\frac{V_w}{V}\Rightarrow C_s\Delta p'=C_s(\Delta p-\Delta u)=nC_w\Delta u$$

  $$\Rightarrow \Delta u=\frac{1}{1+n\frac{C_w}{C_s}}\cdot\Delta p=B\cdot\Delta p, \quad \text{per } S=1\Rightarrow\frac{C_w}{C_s}\simeq 0\Rightarrow\Delta u\simeq\Delta p$$

  B è il parametro delle pressioni interstiziali e indica la parte di incremento di tensione totale che si trasferisce sulla sovrappressione interstiziale in condizioni non drenate;

- triassiale assialsimmetrico ($\Delta\sigma_1>\Delta\sigma_2=\Delta\sigma_3\Rightarrow\Delta p=\frac{1}{3}(\Delta\sigma_1+2\Delta\sigma_3)$, $\Delta p'=\frac{1}{3}(\Delta\sigma_1+2\Delta\sigma_3-3\Delta u)$):

  compressibilità: $C_s\cdot\Delta p'=nC_w\Delta u\Rightarrow C_s\frac{1}{3}(\Delta\sigma_1+2\Delta\sigma_3)-\Delta u C_s=nC_w\cdot\Delta u$

  $$\Rightarrow\Delta u=\frac{1}{1+nC_w/C_s}\left[\Delta\sigma_3+\frac{1}{3}(\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_3)\right]$$

  Si ottiene la formula di Skempton:

  $$\Delta u=B\left[\Delta\sigma_3+A(\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_3)\right]=B\left[\frac{1}{3}(\Delta\sigma_1+2\Delta\sigma_3)+\frac{3A-1}{3}(\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_3)\right]=B\left[\Delta p+\frac{3A-1}{3}\Delta q\right]$$

  Per $S=1$ si assume $B=1$ e nell'ipotesi di comportamento elastico si ha $A=1/3$.

- compressione monodimensionale ($\Delta\sigma_1=\Delta\sigma_3$; $\varepsilon_1=\varepsilon_z=\varepsilon_v\neq0$; $\varepsilon_x=\varepsilon_y=0$):

  Coefficiente di compressibilità monodimensionale: $m_v=\frac{\Delta\varepsilon_z}{\Delta\sigma'_z}=\frac{1}{M}$

  $$\Rightarrow\Delta V_s=m_v\cdot V\cdot\Delta\sigma'_z\Rightarrow m_v(\Delta\sigma_z-\Delta u)=nC_w\cdot\Delta u$$

  $$\Rightarrow\Delta u=\frac{1}{1+nC_w/m_v}\Delta\sigma_z \quad \text{per } S=1\Rightarrow\Delta u\simeq\Delta\sigma_z$$

In regime stazionario il moto di filtrazione è descritto nel modo seguente:

continuità: $\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$; $\left(v_x=-k_x\frac{\partial h}{\partial x}, v_y=-k_y\frac{\partial h}{\partial y}, v_z=-k_z\frac{\partial h}{\partial z}\right)$

Per mezzo isotropo si ottiene l'equazione di Laplace ($k_x=k_y=k_z$):

$$\frac{\partial h^2}{\partial x^2}+\frac{\partial h^2}{\partial y^2}+\frac{\partial h^2}{\partial z^2}=0, \quad \text{nel caso bidimensionale} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial h^2}{\partial z^2}=0$$

L'ultima equazione descrive i reticoli di filtrazione: si può risolvere graficamente con le linee equipotenziali. Altrimenti si passa alle linee di flusso:

funzione di flusso $\Psi(x,z)$, $\left(v_x=\frac{\partial\Psi}{\partial z}, v_z=-\frac{\partial\Psi}{\partial}\right)\Rightarrow\frac{\partial v_x}{\partial z}=\frac{\partial v_z}{\partial x}$ (irrotazionalità)

$$\Rightarrow\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=0$$